

Applications - Chapitre 12

Cinématique et dynamique du solide indéformable



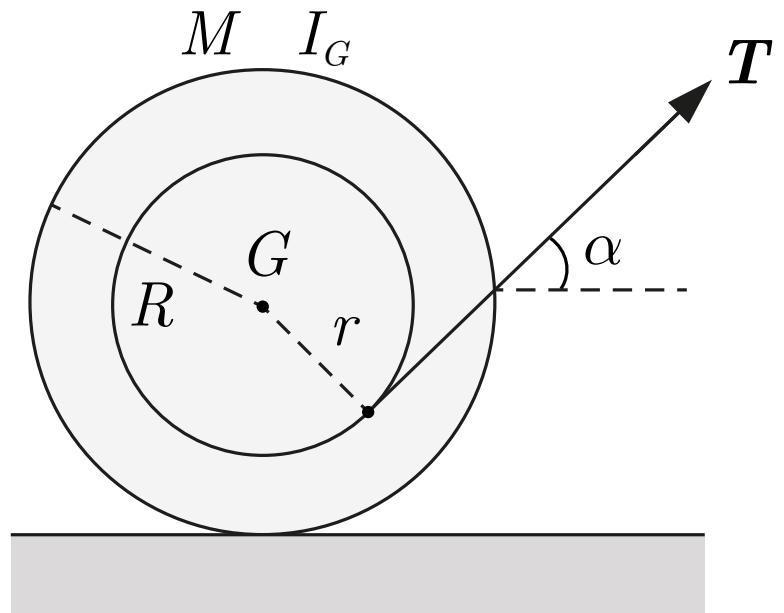
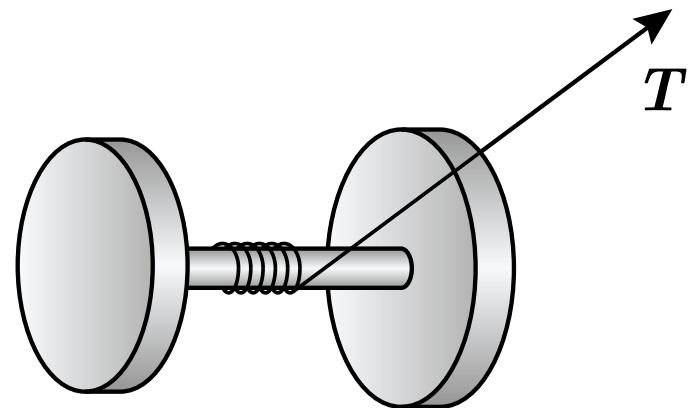
A.12.1 Haltère tirée par un fil

A.12.2 Yoyo

A.12.1 Haltère tirée par un fil

A.12.2 Yoyo

- Une haltère de masse M est formée d'une poignée de rayon r et de deux disques de rayon R . Elle est tirée par une force de traction $T = \text{cste}$ le long d'un fil de masse négligeable qui fait un angle α avec l'axe horizontal.
- L'haltère roule sans glisser sur un plan horizontal. Le fil ne glisse pas sur la poignée.
- Le moment d'inertie de l'haltère par rapport à son axe de symétrie horizontal passant par le centre de masse G est I_G .



- Forces extérieures :

- Poids : en G

$$P = \quad (A.12.1)$$

- Force de réaction normale : en C

$$N = \quad (A.12.2)$$

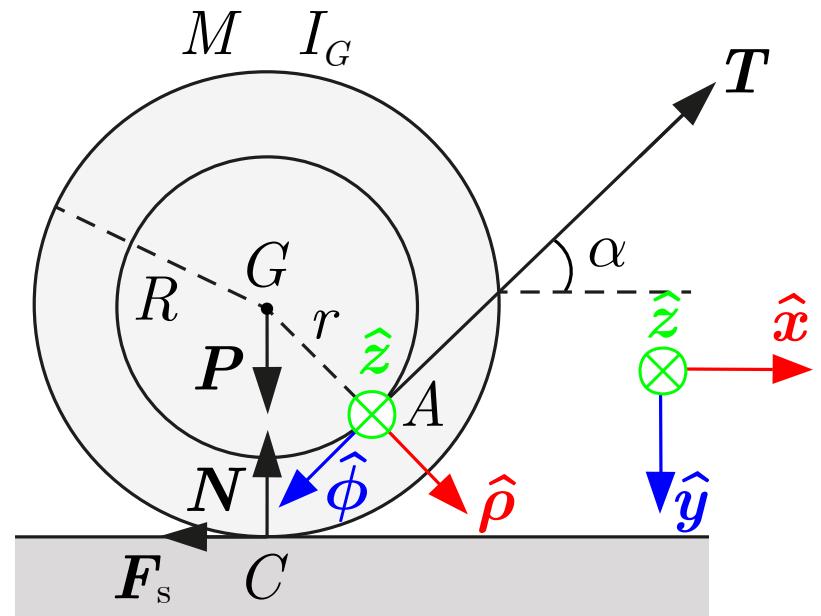
- Traction : en A

$$T = \quad (A.12.3)$$

- Force de frottement statique : en C

$$F_s = \quad (A.12.4)$$

On ne connaît à priori pas le signe de F_s . Il est déterminé par les lois de la dynamique du solide indéformable.



- Accélération du centre de masse :

$$\mathbf{A}_G = \quad (A.12.5)$$

- Accélération angulaire :

$$\dot{\Omega} = \quad (A.12.6)$$

- Théorème du centre de masse :

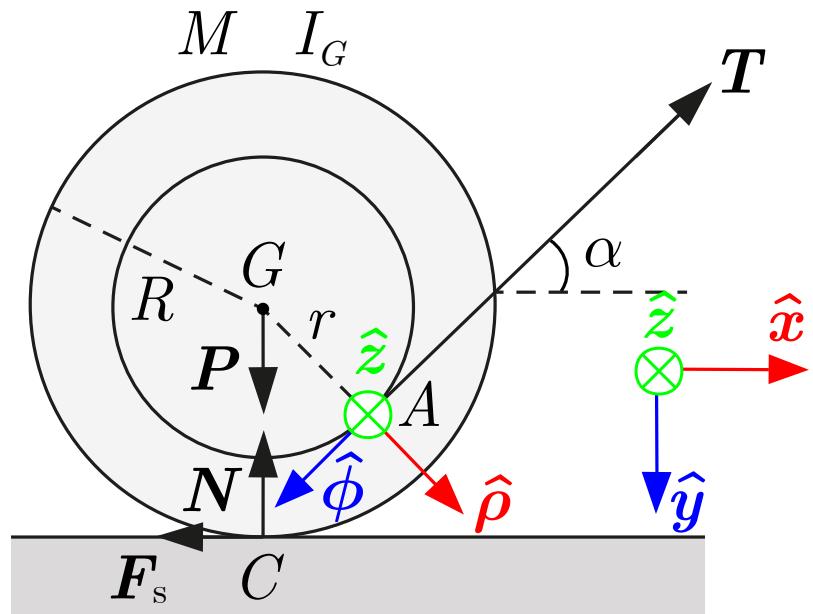
$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} =$$

selon \hat{x} :
$$(A.12.7)$$

selon \hat{y} :
$$(A.12.8)$$

- Théorème du moment cinétique : où

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} =$$



- Théorème du moment cinétique :

$$GA \times T + GC \times F_s = I_G \dot{\Omega}$$

\Rightarrow

$=$

(A.12.9)

selon \hat{z} :

- Liaison : roulement sans glissement

où

(A.12.10)

- Dérivée temporelle :

où

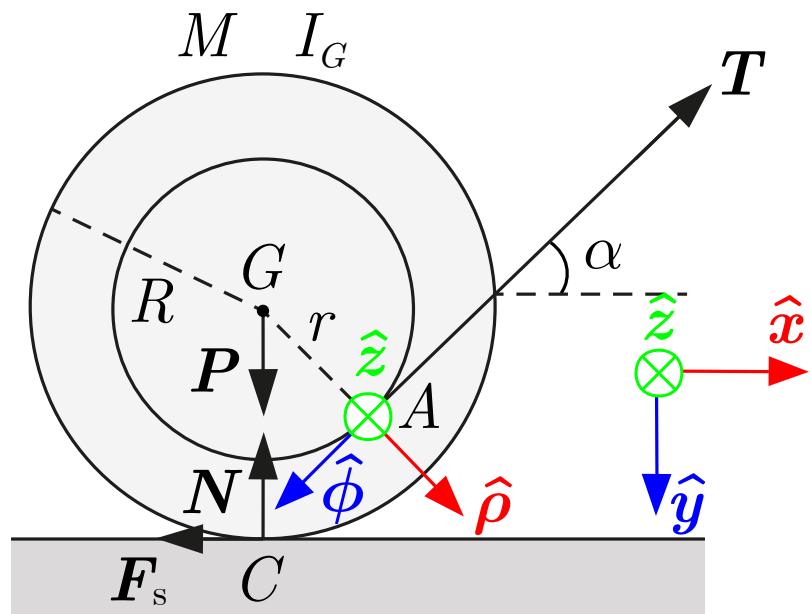
(A.12.11)

\Rightarrow

selon \hat{x} :

\Rightarrow

(A.12.12)

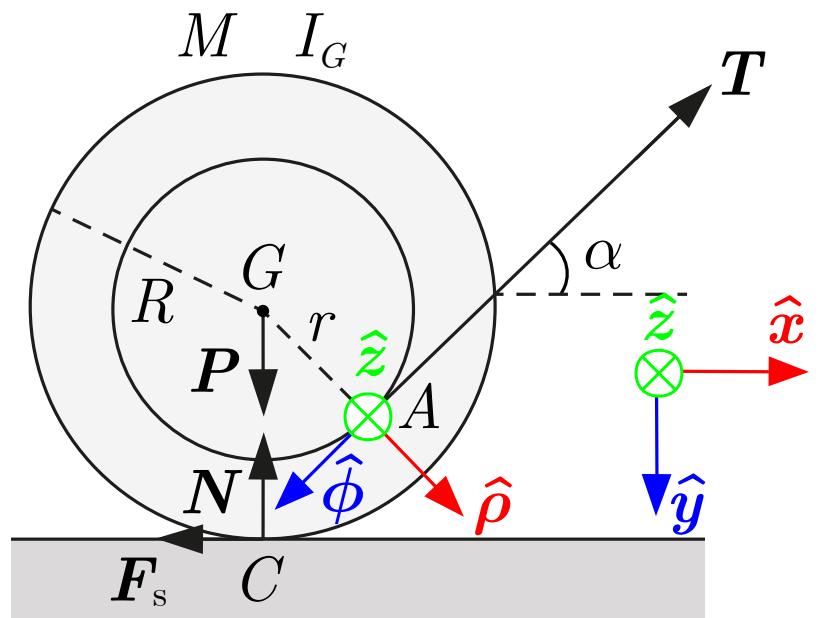


- Equations du mouvement :

$$(A.12.7)$$

$$(A.12.9)$$

- $R \cdot (A.12.7) + (A.12.9) : (A.12.13)$



\Rightarrow

$$(A.12.13)$$

- Accélération du centre de masse :

$$\ddot{X}_G = \frac{\cos \alpha - \frac{r}{R}}{1 + \frac{I_G}{MR^2}} \frac{T}{M} \quad (A.12.13)$$

① Si

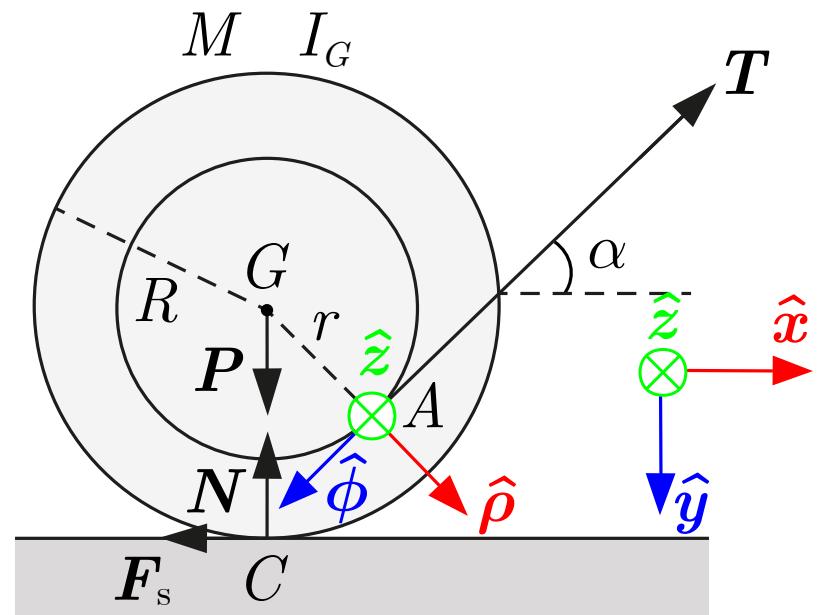
→ droite

② Si

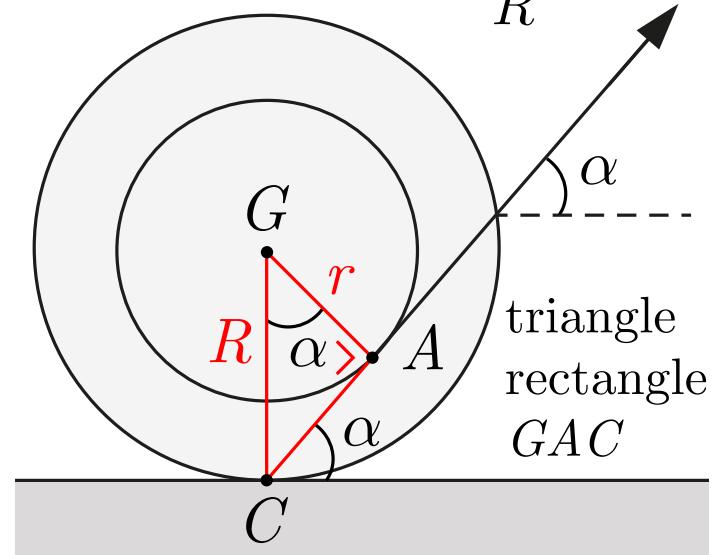
→ gauche

③ Si

équilibre



Équilibre : $\cos \alpha = \frac{r}{R}$



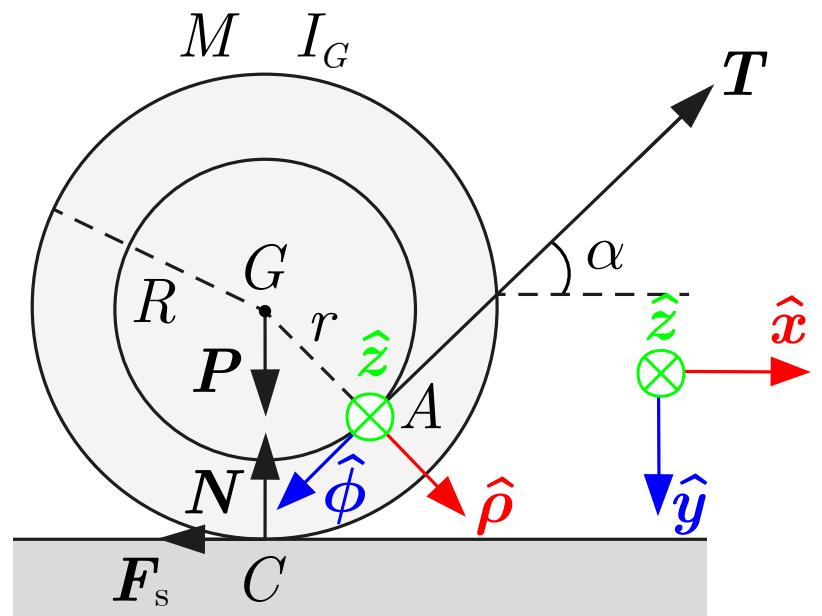
- Force de frottement statique :

(A.12.7)

- Accélération du centre de masse :

$$\ddot{X}_G = \frac{\cos \alpha - \frac{r}{R}}{1 + \frac{I_G}{MR^2}} \frac{T}{M} \quad (A.12.13)$$

- Force de frottement statique :



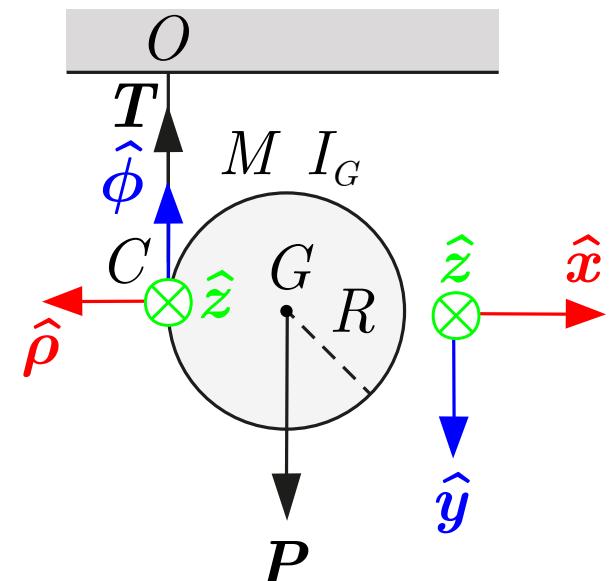
(A.12.14)

- La force de frottement F_s est orientée vers la gauche pour un angle $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$.

A.12.1 Haltère tirée par un fil

A.12.2 Yoyo

- Un yoyo est constitué d'un cylindre de masse M et de rayon R sur la surface duquel est fixé un fil de masse négligeable attaché au plafond au point O .
- Le yoyo roule sans glisser dans un plan vertical. Le fil ne glisse pas sur le yoyo.
- Le moment d'inertie du yoyo par rapport à son axe de symétrie horizontal passant par le centre de masse G est I_G .
- Forces extérieures :



① Poids : en G

$$\mathbf{P} = \quad (A.12.15)$$

② Tension : en C

$$\mathbf{T} = \quad (A.12.16)$$

- Accélération du centre de masse :

$$\mathbf{A}_G = \quad \quad \quad (A.12.17)$$

- Accélération angulaire :

$$\dot{\Omega} = \quad \quad \quad (A.12.18)$$

- Théorème du centre de masse :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \quad \quad \quad (A.12.19)$$

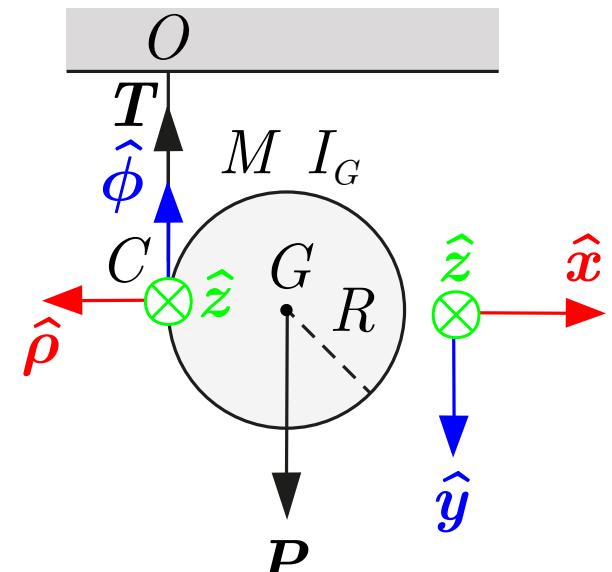
selon $\hat{\mathbf{y}}$: (A.12.20)

- Théorème du moment cinétique : $\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\Omega}$ où $I_G = \text{cste}$

$$\sum M_G^{\text{ext}} =$$

\Rightarrow

selon $\hat{\mathbf{z}}$: (A.12.21)



- Liaison : roulement sans glissement

(A.12.22)

- Dérivée temporelle :

(A.12.23)

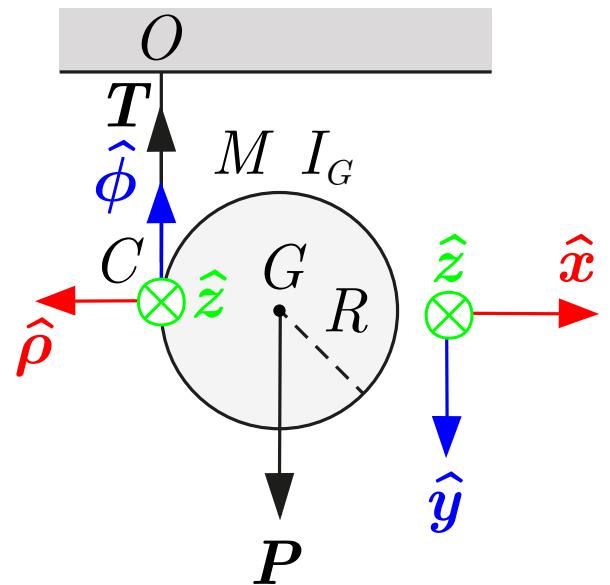
 \Rightarrow selon \hat{y} :

(A.12.24)

- Equations du mouvement :

$$Mg - T = M \ddot{Y}_G \quad (A.12.20)$$

(A.12.25)



- Equations du mouvement :

$$Mg - T = M \ddot{Y}_G \quad (A.12.20)$$

$$R^2 T = I_G \ddot{Y}_G \quad (A.12.25)$$

- $R^2 \cdot (A.12.20) + (A.12.25) :$

$$(A.12.26)$$

\Rightarrow

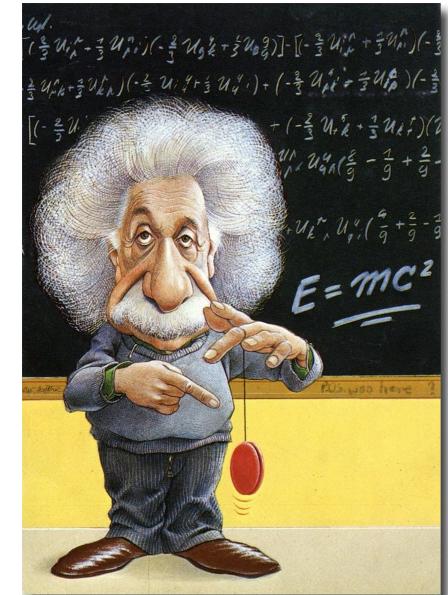
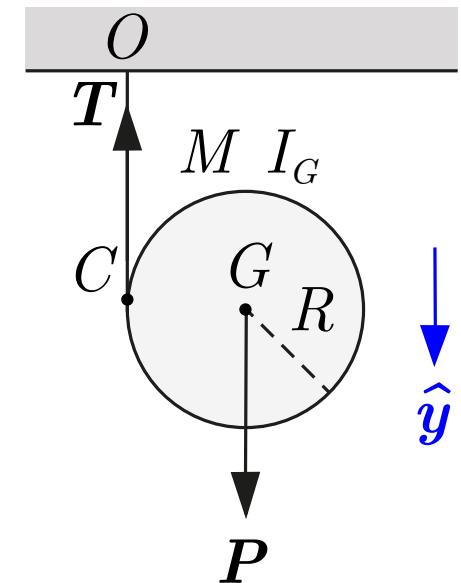
$$(A.12.27)$$

- $I_G \cdot (A.12.20) = M \cdot (A.12.25) :$

$$(A.12.28)$$

\Rightarrow

$$(A.12.29)$$



- Cylindre plein : $I_G =$

$$\ddot{Y}_G = \quad \quad \quad (A.12.30)$$

$$T = \quad \quad \quad (A.12.31)$$

- Cylindre creux : $I_G =$

$$\ddot{Y}_G = \quad (A.12.32)$$

$$T = \quad (A.12.33)$$

- ## • Yoyo réel :

