

# Applications - Chapitre 12

## Cinématique et dynamique du solide indéformable



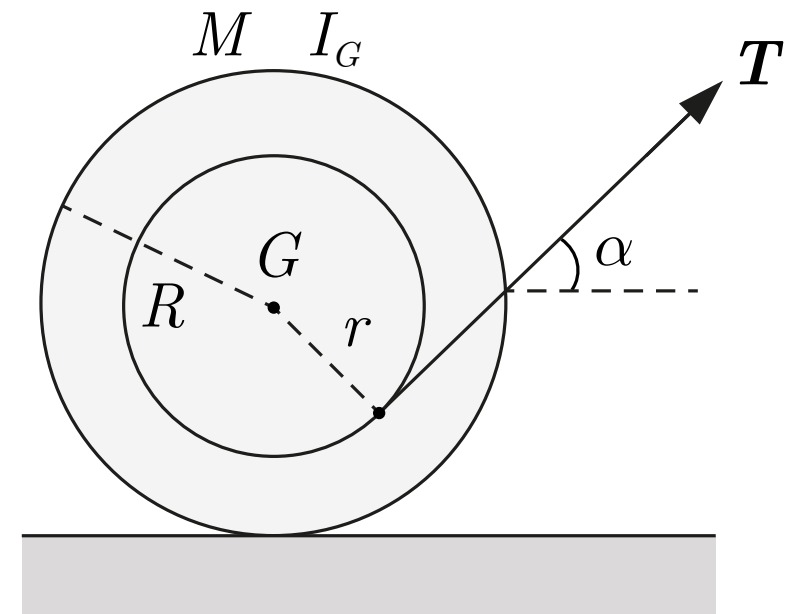
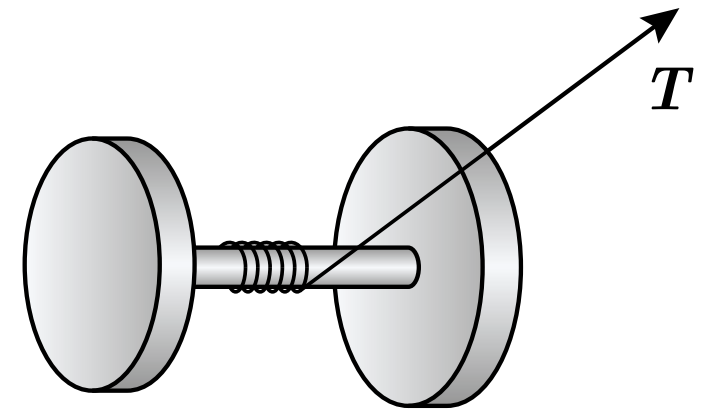
## A.12.1 Haltère tirée par un fil

## A.12.2 Yoyo

## A.12.1 Haltère tirée par un fil

## A.12.2 Yoyo

- Une haltère de masse  $M$  est formée d'une poignée de rayon  $r$  et de deux disques de rayon  $R$ . Elle est tirée par une force de traction  $T = \text{cste}$  le long d'un fil de masse négligeable qui fait un angle  $\alpha$  avec l'axe horizontal.
- L'haltère roule sans glisser sur un plan horizontal. Le fil ne glisse pas sur la poignée.
- Le moment d'inertie de l'haltère par rapport à son axe de symétrie horizontal passant par le centre de masse  $G$  est  $I_G$ .



- Forces extérieures :

- 1 Poids : en  $G$

$$\mathbf{P} = \quad (A.12.1)$$

- 2 Force de réaction normale : en  $C$

$$\mathbf{N} = \quad (A.12.2)$$

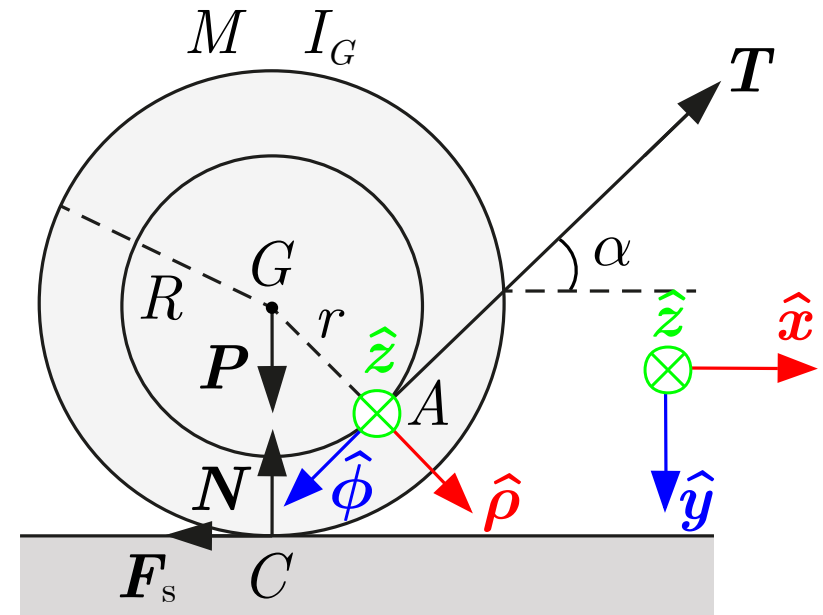
- 3 Traction : en  $A$

$$\mathbf{T} = \quad (A.12.3)$$

- 4 Force de frottement statique : en  $C$

$$\mathbf{F}_s = \quad (A.12.4)$$

On ne connaît à priori pas le signe de  $F_s$ . Il est déterminé par les lois de la dynamique du solide indéformable.



- Accélération du centre de masse :

$$\mathbf{A}_G = \quad (A.12.5)$$

- Accélération angulaire :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \quad (A.12.6)$$

- Théorème du centre de masse :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} =$$

selon  $\hat{\mathbf{x}}$  :

$$(A.12.7)$$

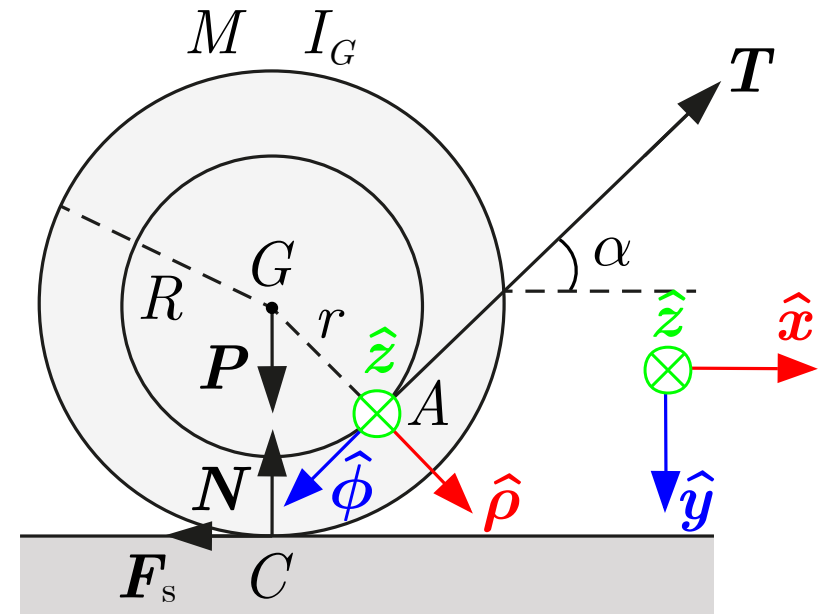
selon  $\hat{\mathbf{y}}$  :

$$(A.12.8)$$

- Théorème du moment cinétique :

où

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} =$$



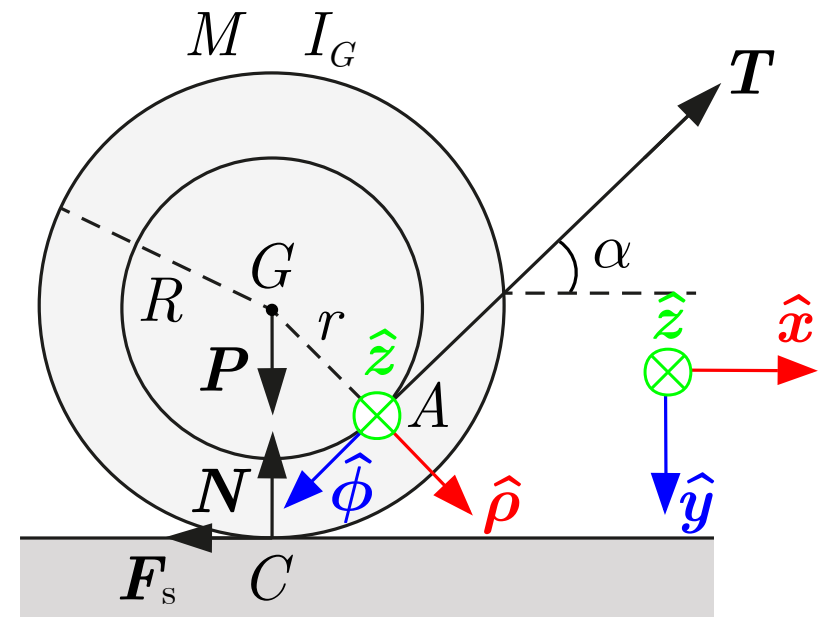
- Théorème du moment cinétique :

$$\mathbf{GA} \times \mathbf{T} + \mathbf{GC} \times \mathbf{F}_s = I_G \dot{\boldsymbol{\Omega}}$$

 $\Rightarrow$ 
 $=$ 

(A.12.9)

selon  $\hat{\mathbf{z}}$  :



- Liaison : roulement sans glissement

où

(A.12.10)

- Dérivée temporelle :

où

(A.12.11)

 $\Rightarrow$ 

selon  $\hat{\mathbf{x}}$  :

 $\Rightarrow$ 

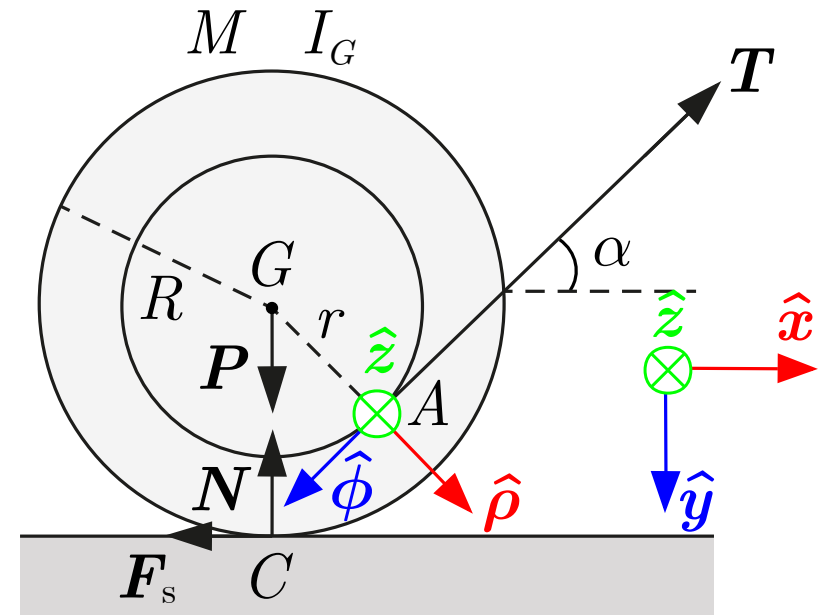
(A.12.12)

- Equations du mouvement :

$$(A.12.7)$$

$$(A.12.9)$$

- $R \cdot (A.12.7) + (A.12.9) :$   $(A.12.13)$


 $\Rightarrow$ 
 $(A.12.13)$



- Accélération du centre de masse :

$$\ddot{X}_G = \frac{\cos \alpha - \frac{r}{R}}{1 + \frac{I_G}{MR^2}} \frac{T}{M} \quad (A.12.13)$$

1 Si

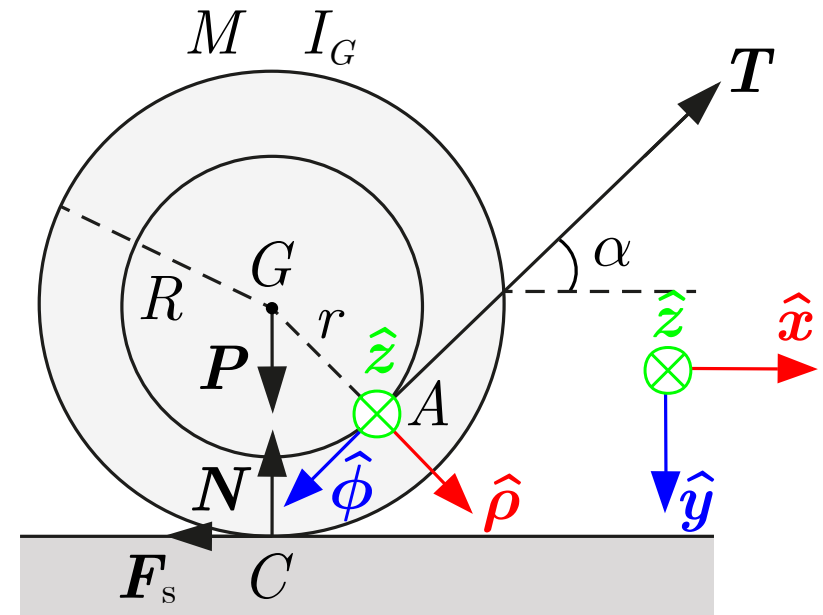
→ droite

2 Si

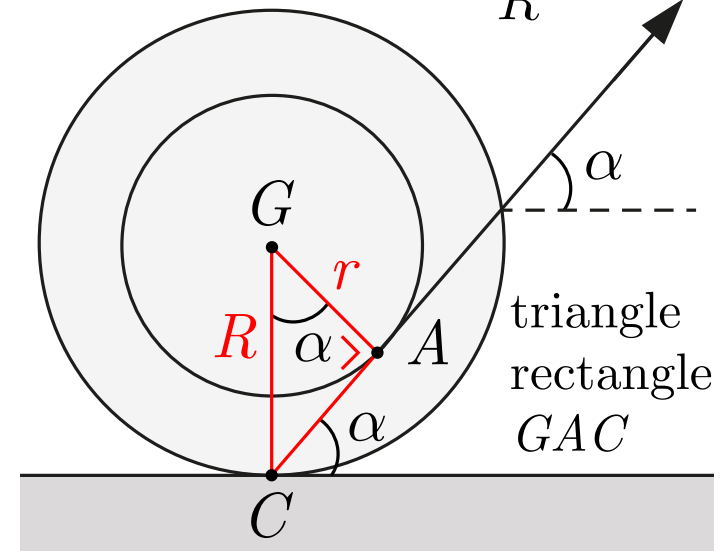
→ gauche

3 Si

équilibre



Equilibre :  $\cos \alpha = \frac{r}{R}$

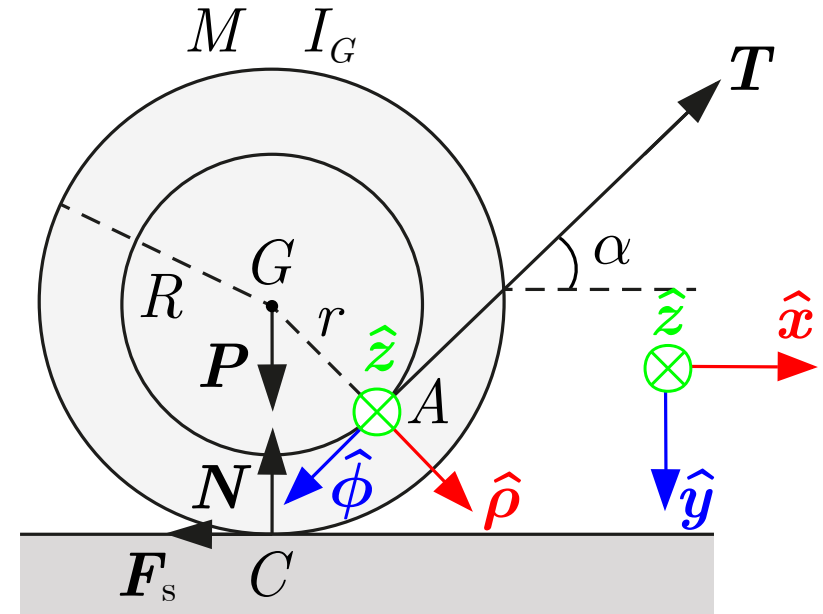


- Force de frottement statique :

$$(A.12.7)$$

- Accélération du centre de masse :

$$\ddot{X}_G = \frac{\cos \alpha - \frac{r}{R}}{1 + \frac{I_G}{MR^2}} \frac{T}{M} \quad (A.12.13)$$



- Force de frottement statique :

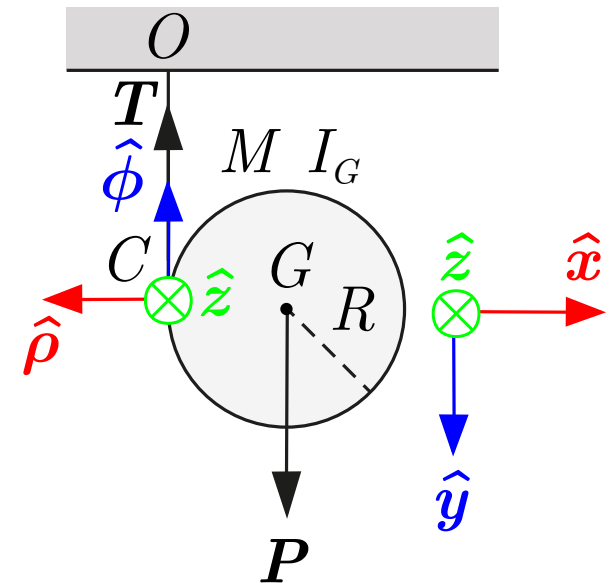
$$(A.12.14)$$

- La force de frottement  $F_s$  est orientée vers la gauche pour un angle  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

## A.12.1 Haltère tirée par un fil

## A.12.2 Yoyo

- Un yoyo est constitué d'un cylindre de masse  $M$  et de rayon  $R$  sur la surface duquel est fixé un fil de masse négligeable attaché au plafond au point  $O$ .
- Le yoyo roule sans glisser dans un plan vertical. Le fil ne glisse pas sur le yoyo.
- Le moment d'inertie du yoyo par rapport à son axe de symétrie horizontal passant par le centre de masse  $G$  est  $I_G$ .
- Forces extérieures :



- 1 Poids : en  $G$

$$\mathbf{P} = \quad (A.12.15)$$

- 2 Tension : en  $C$

$$\mathbf{T} = \quad (A.12.16)$$

- Accélération du centre de masse :

$$\mathbf{A}_G = \quad (A.12.17)$$

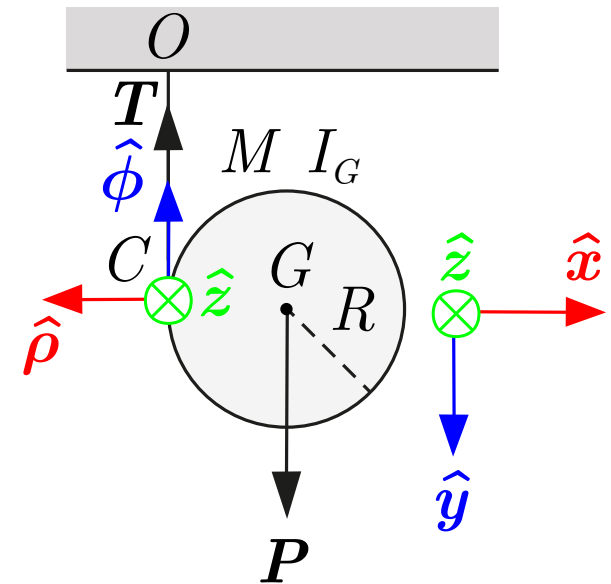
- Accélération angulaire :

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \quad (A.12.18)$$

- Théorème du centre de masse :

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \quad (A.12.19)$$

selon  $\hat{\mathbf{y}}$  :



$$(A.12.20)$$

- Théorème du moment cinétique :  $\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\Omega}$  où  $I_G = \text{cste}$

$$\sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} =$$

$\Rightarrow$

$$\text{selon } \hat{\mathbf{z}} : \quad (A.12.21)$$

- Liaison : roulement sans glissement

$$(A.12.22)$$

- Dérivée temporelle :

$$(A.12.23)$$

$\Rightarrow$

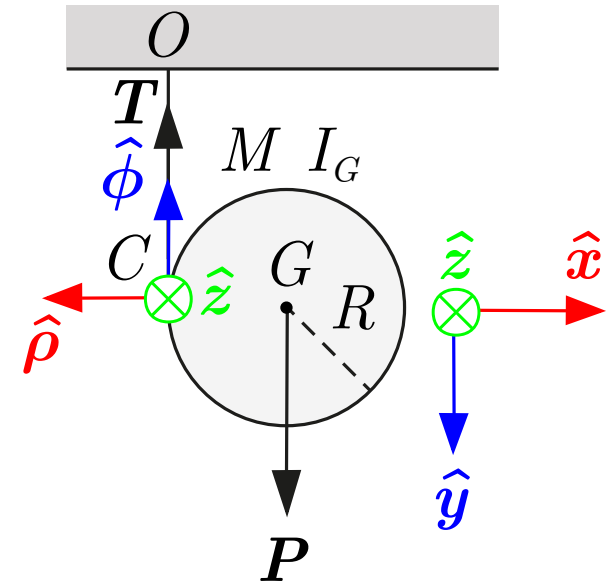
selon  $\hat{y}$  :

$$(A.12.24)$$

- Equations du mouvement :

$$Mg - T = M \ddot{Y}_G \quad (A.12.20)$$

$$(A.12.25)$$



- Equations du mouvement :

$$Mg - T = M \ddot{Y}_G \quad (A.12.20)$$

$$R^2 T = I_G \ddot{Y}_G \quad (A.12.25)$$

- $R^2 \cdot (A.12.20) + (A.12.25) :$

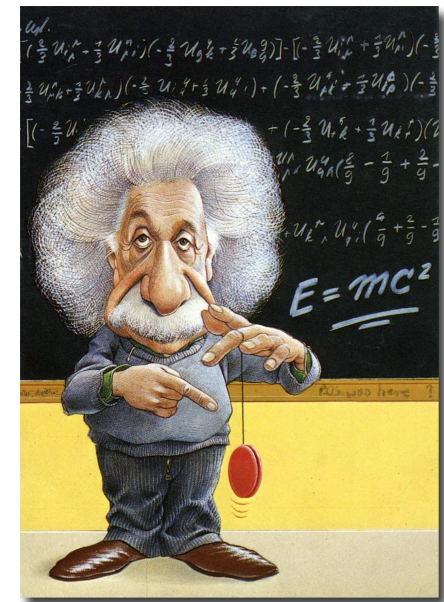
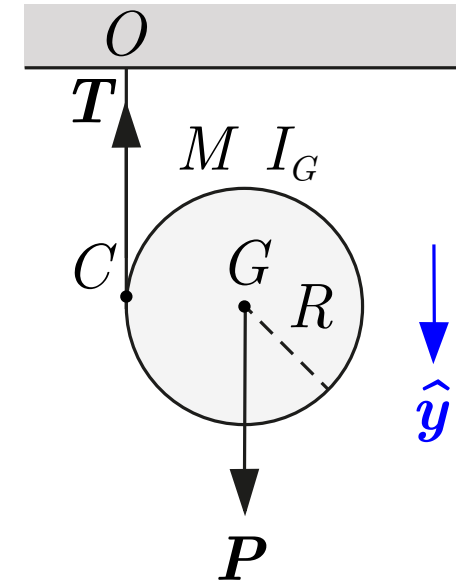
$$(A.12.26)$$

$$\Rightarrow \quad (A.12.27)$$

- $I_G \cdot (A.12.20) = M \cdot (A.12.25) :$

$$(A.12.28)$$

$$\Rightarrow \quad (A.12.29)$$



- Cylindre plein :  $I_G =$

$$\ddot{Y}_G = \quad (A.12.30)$$

$$T = \quad (A.12.31)$$

- Cylindre creux :  $I_G =$

$$\ddot{Y}_G = \quad (A.12.32)$$

$$T = \quad (A.12.33)$$

- Yoyo réel :

